D.E.Ü. İ.İ.B.F. Dergisi
Cilt: 7, Sayı: 1, 1992, ss.244-255.

ULAŞTIRMA PROBLEMLERİNDE DUAL DEĞİŞKENLERİN EKONOMİK YORUMU

Nilgün MORALI (*)

ÖZET

Ulaştırma modelinin duali için, primal problemin her temel geçerli çözümüne karşılık gelen sonsuz sayıda çözüm vardır. Dolayısıyla belirli bazı koşulları sağlayan dual değişkenler için özel ekonomik açıklamalar yapılabilir. Bu makalede öncelikle ulaştırma problemlerinin primal ve dual biçimleri incelenmiştir. Daha sonra dengeli ve dengeli olmayan ulaştırma modelleri için ayrı ayrı dual değişkenlerin ekonomik anlamları tartışılmıştır

1. Giriş

Doğrusal programlama modellerinde dual problemin en önemli özelliklerinden biri, primal problem hakkında ek bilgi sağlamasıdır. Bu bilgiler fırsat maliyetleri ve gölge fiyatlar olarak ekonomik anlam taşırlar.

Doğrusal programlama modellerinin özel bir uygulaması olan ulaştırma problemlerinde her temel geçerli çözüm için dual problemin sonsuz sayıda çözümü vardır. Bu koşullarda, dual değişkenler hakkında bir ekonomik yorum yapmak mümkün müdür? Eğer bu mümkünse, ekonomik yorum nasıl ve neye dayanarak yapılmalıdır? Bu sorulara açıklık getirmek amacıyla yapılan bu çalışmanın başında ulaştırma problemleri ve dual problem, çözümlerinin özellikleriyle birlikte tanıtılmıştır. Daha sonra dengeli ve dengeli olmayan problemlerde gölge fiyatlar ve dual değişkenler ayrıntılarıyla incelenmiştir.

2. ULAŞTIRMA PROBLEMLERİ

Ulaştırma problemlerinde belirli bir malın toplam dağıtım maliyeti minimum olacak şekilde, çeşitli arz merkezlerinden çeşitli talep merkezlerine ne miktarlarda gönderilmesi gerektiği araştırılır. Arz ve talep merkezlerinin kapasiteleri problemin sınırlandırıcı koşullarını oluşturur. m tane arz merkezi ve n tane talep merkezi olması durumunda, ulaştırma modeli Şekil 1'de görüldüğü gibi özetlenir (Winston,1991,s.328). Modelin parametreleri,

(*) Yrd.Doç.Dr.D.E.Ü.İ.İ.B.F.Ekonometri Bölümü

c_{ij} : i arz merkezinden j talep merekezine birim mal göndermenin maliyeti
(i=1,2,...,m j=1,2,...,n)

s_i : i arz merkezinden gönderilebilecek toplam miktar (i=1,2,...,m)

d_j : j talep merkezinin alabileceği toplam miktar (j=1,2,...,n)

biçimindedir. Karar değişkenleri ise

x_{ij} : i arz merkezinden j talep merkezine gönderilecek miktar (i=1,2,..,m
j=1,2,...,n)

olarak tanımlanır. Problemin doğrusal programlama modeli

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i \qquad i=1,2,\ldots m \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \qquad j=1,2,\ldots n \qquad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i=1,2,\ldots,m \quad j=1,2,\ldots,n \qquad (4)$$

ile ifade edilir.

ŞEKİL 1. Ulaştırma Modeli

c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	. . .	c_{1n} x_{1n}	s_1
c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	. . .	c_{2n} x_{2n}	s_2
⋮	⋮		⋮	⋮
c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	. . .	c_{mn} x_{mn}	s_m
d_1	d_2	. . .	d_n	

Bu modelde dikkati çeken en önemli nokta, modelin bir geçerli çözümünün bulunabilmesi için

$$\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j \qquad (5)$$

koşulunun sağlanması gerektiğidir. Sözel olarak bu koşul, toplam arzın toplam talebe eşit olması gerektiği anlamındadır.

Toplam arzın toplam talebe eşit olmadığı durumlarda da problem yine bir ulaştırma modeliyle ifade edilebilir. Bunun için bir kukla arz merkezinden ya da kukla talep merkezinden yararlanılarak toplam arz ve toplam talep eşitlenir. Bu tip ulaştırma problemlerine *dengeli olmayan ulaştırma problemleri* adı verilir. Problemin başlangıcında toplam arz ve toplam talep eşitse, probleme *dengeli ulaştırma problemi* denir.

(1) - (4) ile belirlenen modelin dualini ifade etmek için, arz merkezlerinin kapasiteleriyle ilgili kısıtlara u_i dual değişkenleri ve talep merkezlerinin kapasiteleriyle ilgili kısıtlara karşılık olarak v_j dual değişkenleri kullanıldığında dual problem

$$\max y_0 = \sum_{i=1}^{m} s_i u_i + \sum_{j=1}^{n} d_j v_j \qquad (6)$$

$$u_i + v_j \leq c_{ij} \qquad i=1,2,\dots,m \quad j=1,2,\dots,n \qquad (7)$$

$$u_i, v_j : \text{sınırlandırılmamış} \qquad i=1,2,\dots,m \quad j=1,2,\dots,n$$

olur. Dual problemdeki kısıtlara ait boşluk değişkenleri d_{ij} ile gösterildiğinde (7) ile belirlenen kısıtlar

$$u_i + v_j + d_{ij} = c_{ij} \qquad i=1,2,\dots,m \quad j=1,2,\dots,n \qquad (8)$$

$$d_{ij} \geq 0 \qquad i=1,2,\dots,m \quad j=1,2,\dots,n \qquad (9)$$

biçiminde ifade edilir.

Dual problemin ekonomik açıklamasında, ulaştırma modelindeki x_{ij} karar değişkenlerine karşılık gelen $d_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$ boşluk değişkenleri i arz merkezinden j talep merkezine bir birim daha göndermenin toplam maliyete etkisini (kısaca, fırsat maliyetini) belirler. Diğer dual değişkenlerden elde edilmesi beklenen ekonomik açıklama ise,

u_i : i arz merkezinin kapasitesini bir birim artırmanın toplam maliyete etkisi

v_j : j talep merkezinin ihtiyacının bir birim artmasının toplam maliyete etkisi biçimindedir. Kısaca, arz ve talep merkezlerine ilişkin gölge fiyatlardır.

Ekonomik açıdan son derece önemli olan bu fırsat maliyetlerinin ve gölge fiyatların hesaplanması için dual problemin çözümü gereklidir. Dual problemin çözümü için ise primal problemin çözümünden yararlanılır. Optimal çözümde yer alan her x_{ij} temel değişkenine karşılık gelen dual kısıt eşitlik biçiminde ifade edilir

$$u_i + v_j = c_{ij} \tag{10}$$

Ulaştırma problemlerinin temel çözümünde (m+n-1) temel değişken bulunması nedeniyle, bu eşitlikler (m+n) bilinmeyenli (m+n-1) denklemli bir sistem oluşturur. (Hillier ve Lieberman,1974,s.123) Böyle bir sistemin sonsuz sayıda çözümü vardır. u_i veya v_j değişkenlerinden herhangi birine serbest bir δ değeri verildiğinde, diğer bütün değişkenler δ'ya bağlı olarak ifade edilir. Bu çözümler arasından hangisi ya da hangileri gölge fiyatları belirlemek için uygundur? Bu sorunun yanıtı aşağıda dengeli ve dengeli olmayan problemler için ayrı ayrı incelenmektedir.

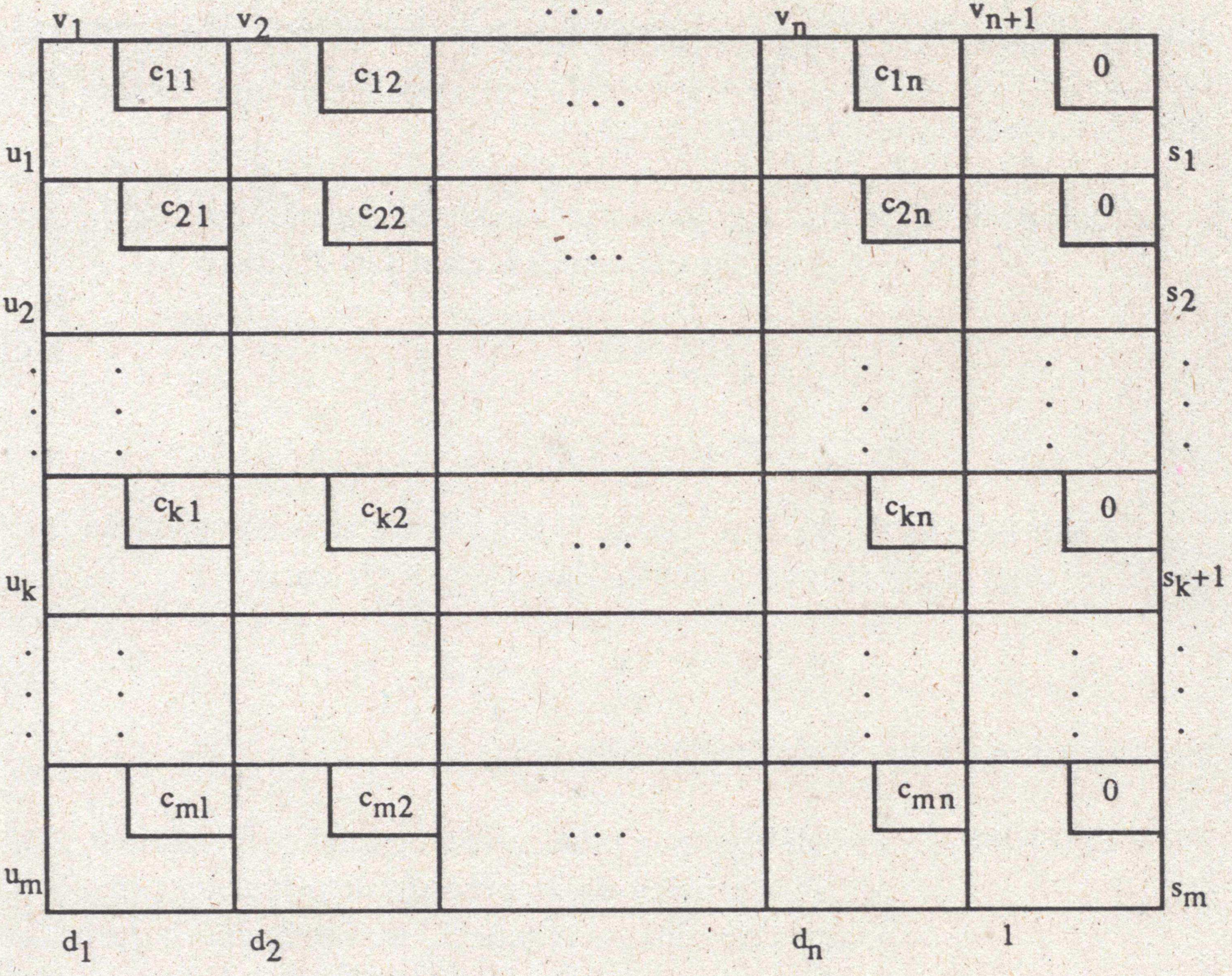
3. DENGELİ ULAŞTIRMA PROBLEMLERİNDE GÖLGE FİYATLAR

Matematiksel olarak gölge fiyat, bir doğrusal programlama modelinin herhangi bir kısıtında sağ taraf değerini bir birim artırmanın diğer bütün parametreler aynı kalmak koşuluyla amaç fonksiyonunun değerinde neden olacağı değişiklik olarak tanımlanır (Anderson, Sweeney ve Williams, 1982, s.173) . Dolayısıyla, bir ulaştırma probleminde herhangi bir arz ya da talep merkezine ilişkin gölge fiyatın elde edilmesi için, bu merkeze ait kapasitenin bir birim artırılarak optimal çözümün yeniden bulunması ve her iki optimal çözümdeki toplam maliyetler arasındaki farkın hesaplanması yeterli olur.

Genel biçimi Şekil 1'de görüldüğü gibi verilen bir ulaştırma probleminde k. arz merkezine ilişkin gölge fiyatın hesaplanması için s_k sınır değeri bir birim artırılıp diğer parametreler sabit tutulduğunda, bu problemi dengeli duruma getirmek için talebi bir birim ve ulaştırma maliyetleri 0 olan bir kukla talep mer

D.E.Ü. İ.İ.B.F. Dergisi
Cilt: 7, Sayı: 1, 1992, ss.244-255.

ŞEKİL 2. Ulaştırma Modeli



kezi eklenir. Şekil 2'de görülen biçimi alan bu modelde kukla talep merkezine ilişkin gölge fiyat v_{n+1} ile gösterilmiştir. Optimal çözümde kukla talep merkezine bir birim mal gönderen arz merkezi p olduğunda, (10) bağıntısına göre

$$u_p + v_{n+1} = 0 \qquad (11)$$

ve diğer arz merkezleri için

$$u_i + v_{n+1} \leq 0 \qquad i=1,2,...,m \qquad (12)$$

olur.

Primal ve dual problemler arasındaki ilişkilerde tümleyici boşluk teoremine göre, primal problemdeki kısıtlardan birine ait boşluk değişkeni optimal çözümde pozitif değer alıyorsa (temel değişkense), bu kısıta ilişkin gölge fiyat sıfırdır.Bunun sonucu ola-rak, kukla talep merkezine mal gönderen p. arz merkezine ilişkin gölge fiyat sıfırdır. Dolayısıyla u_i değerlerinin gölge fiyatları ifade edebilmesi için u_p=0 olmalıdır. Bu koşul-larda (11)'e bağlı olarak v_{n+1}=0 elde edilir. Böylece sunulan önerme kanıtlanmış olur.

ÖNERME 1 : Ulaştırma problemlerinde kukla talep merkezine ilişkin gölge fiyat sıfırdır ve bunu ifade eden dual değişken

$$v_{n+1} = 0 \tag{13}$$

ile gösterilir.

Kukla talep merkezine ilişkin gölge fiyatın sıfır olarak belirlenmesiyle, optimalite koşulları olarak (12) ile verilen ilişkiler, (13)'e bağlı olarak

$$u_i \leq 0 \qquad i=1,2,...,m \tag{14}$$

biçimini alır ve Önerme 2'nin temelini oluşturur.

ÖNERME 2: Dengeli ulaştırma probleminin optimal çözümünde u_i dual değişkenlerinden en az biri sıfır,diğerleri negatif olacak şekilde elde edilen u_i değerleri, i arz merkezinin kapasitesini bir birim artırmanın toplam maliyette neden olacağı değişikliği (kısaca, gölge fiyatı) belirler.

KANIT : Dengeli ulaştırma probleminin optimal çözümünde elde edilen amaç fonksiyonu değeri dual değişkenlere bağlı olarak

$$y_0 = \Sigma_{i=1}^{m} s_i u_i + \Sigma_{j=1}^{n} d_j v_j$$

ile ifade edilir. Herhangi bir k arz merkezinin kapasitesi bir birim artırılarak elde edilen optimal çözümde amaç fonksiyonu değeri

$$y_k = \Sigma_{i=1}^{m} s_i u_i + \Sigma_{j=1}^{n} d_j v_j + u_k + v_{n+}$$

olur. Burada Önerme 1'e bağlı olarak v_{n+1}=0 şeklindedir. Dolayısıyla u_k=y_k-y_0 olduğu , başka bir deyişle u_k'nın k arz merkezinin kapasitesinin bir birim artmasıyla toplam maliyette ortaya çıkan değişikliği ifade ettiği belirlenir.

Arz merkezlerine ilişkin gölge fiyatların belirlenmesine örnek olması

D.E.Ü. İ.İ.B.F. Dergisi
Cilt: 7, Sayı: 1, 1992, ss.244-255.

amacıyla Şekil 3'de dengeli bir ulaştırma probleminin optimal çözümü, dual değişkenlerin δ'ya bağlı değerleriyle birlikte görülmektedir.

Önerme 2'ye göre en az bir $u_i=0$ ve diğerleri negatif olacak şekilde dual değişkenlerin hesaplanmasında

$$u_1=\delta \leq 0 \qquad u_2=5+\delta \leq 0 \qquad u_3=-3+\delta \leq 0$$

koşullarını sağlayan δ değeri araştırılır ve δ=-5 olarak belirlenir. Böylece $u_1=-5$ $u_2=0$ $u_3=-8$ elde edilir ve bu değerler sırasıyla

ŞEKİL 3. Örnek Problem

	$v_1=8-\delta$	$v_2=-2-\delta$	$v_3=4-\delta$	
$u_1=\delta$	[8] 5	[5]	[4] 15	20
$u_2=5+\delta$	[15]	[3] 45	[9] 10	55
$u_3=3+\delta$	[5] 25	[2]	[3]	25
	30	45	25	

Toplam Maliyet=450

- Birinci arz merkezinin kapasitesi bir birim artırılırsa toplam maliyet 5 birim azalır,

- İkinci arz merkezinin kapasitesi bir birim artırılırsa toplam maliyet etkilenmez,

- Üçüncü arz merkezinin kapasitesi bir birim artırılırsa toplam maliyet 8 birim azalır

şeklinde yorumlanır. Gerçekten de birinci arz merkezinin kapasitesi bir birim artırıldığında optimal çözüm Şekil 4'de görülen biçimi almakta ve toplam maliyet 5 birim azalma

ŞEKİL 4. arz Merkezlerinin Gölge Fiyatları

	$v_1=13$	$v_2=3$	$v_3=9$	$v_4=0$	
$u_1=5$	8 / 5	5	4 / 16	0	21
$u_2=0$	15	3	9	0	55
$u_3=8$	5 / 25	2	3	0	25
	30	45	25	1	

Toplam Maliyet=445

Talep merkezlerine ilişkin gölge fiyatların hesaplanmasında, arz merkezlerinin gölge fiyatlarının bulunması için izlenen yol tamamen benzer şekilde kolaylıkla uygulanabilir. Elde edilen sonuçlar aşağıda Önerme 3 ve Önerme 4 ile sunulmaktadır.

ÖNERME 3 : Ulaştırma problemlerinde kukla arz merkezine ilişkin gölge fiyat sıfırdır ve bunu ifade eden dual değişken

$$u_{m+1} = 0 \tag{15}$$

ile gösterilir.

ÖNERME 4 : Dengeli ulaştırma probleminin optimal çözümünde v_j dual değişkenlerinden en az biri sıfır ve diğerleri negatif olacak şekilde elde edilen v_j değerleri, j talep merkezinin ihtiyacının bir birim artmasıyla toplam maliyette ortaya çıkacak değişikliği (kısaca, gölge fiyatı) belirler.

Talep merkezlerinin gölge fiyatları için uygulama örneği olarak yine Şekil 3'de optimal çözümü verilen ulaştırma problemi incelendiğinde, δ değeri

$$v_1=8-\delta \leq 0 \qquad v_2=-2-\delta \leq 0 \qquad v_3=4-\delta \leq 0$$

koşullarını sağlayan sınır değerleriyle belirlenir ve δ=8 olur. Bu durumda $v_1 = 0$ $v_2=-10$ $v_3=-4$ dual değişkenleri, gölge fiyatlar olarak

- Birinci talep merkezinin ihtiyacının bir birim artması toplam maliyeti etkilemez,

- İkinci talep merkezimin ihtiyacının bir birim artmasıyla toplam maliyet 10 birim azalır,

- Üçüncü talep merkezinin ihtiyacının bir börim artmasıyla toplam maliyet 4 birim azalır

şeklinde yorumlanır. Örneğin ikinci talep merkezinin ihtiyacının bir birim artması optimal çözümün Şekil 5'de görüldüğü gibi değişmesine neden olur ve toplam maliyetteki değişikliğin -10 olduğu görülür.

ŞEKİL 5. Talep Merkezlerinin Gölge Fiyatları

	$v_1=0$	$v_2=10$	$v_3=4$	
$u_1=8$	8 4	5	4 16	20
$u_2=13$	15	3	9	55
$u_3=5$	5 25	2	3	25
$u_4=0$	0 8	0	0	1
	30	46	25	

Toplam
Maliyet=440

4. DENGELİ OLMAYAN ULAŞTIRMA PROBLEMLERİNDE GÖLGE FİYATLAR

m tane arz merkezi ve n tane talep merkezi ile tanımlanan dengeli olmayan bir ulaştırma probleminin çözümünü bulmak için gereğine göre kukla arz ya da talep merkezinden yararlanılır. Dolayısıyla, çözüm tablosunda yer alan sıra ve sütun sayıları toplamı m+n+1 olur ve temel çözümde m+n temel değişken yer alır.

Dual değişkenlerin hesaplanması amacıyla $c_{ij}=u_i+v_j$ biçiminde m+n denklem sıralanır. Elde edilen denklem sisteminde m+n+1 değişken vardır. Fakat bunlar arasında, kukla arz merkezinden mal alan ya da kukla talep merkezine mal gönderen merkezlere ilişkin dual değişkenler sıfır olmalıdır. Çünkü bir kukla arz merkezinden karşılanan talep gerçekte karşılanmıyor demektir; ya da bir kukla talep merkezine gönderilen mal gerçekte olduğu yerde bırakılıyor anlamını taşır. Dolayısıyla, kukla merkez ile ilişkide bulunan merkezin zaten boş kapasitesi var olduğundan kapasitesini bir birim artırmak toplam maliye etkilemez; başka bir deyişle, bu merkeze ilişkin gölge fiyat sıfırdır. Dual değişkenlerden biri sıfır olarak böylece belirlendikten sonra, diğerleri kolaylıkla hesaplanır.

Toplam arzın toplam talepten büyük olduğu ulaştırma problemlerine bir örnek olarak optimal çözüm tablosu Şekil 6'da verilmiştir. Kukla talep merkezine 3 birim mal gönderen üçüncü arz merkezine ilişkin gölge fiyat sıfırdır. Birinci ve ikinci arz merkezlerinin kapasitelerinin bir birimlik artışı, toplam maliyet sırasıyla 5 ve 3 birimlik azalmaya neden olacaktır. ayrıca talep merkezlerinin kapasitelerinin bir birim artışı, toplam maliyette sırasıyla $v_1=6$, $v_2=8$, $v_3=9$ birimlik artışlara neden olacaktır.

ŞEKİL 6. Dengeli Olmayan Ulaştırma Problemi

	$v_1=6$	$v_2=8$	$v_3=9$	$v_4=0$	
$u_1=5$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$ 6	$\boxed{4}$ 11	$\boxed{0}$	17
$u_2=3$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$	$\boxed{7}$	$\boxed{0}$	15
$u_3=0$	$\boxed{6}$ 12	$\boxed{9}$	$\boxed{11}$	$\boxed{0}$ 3	15
	20	13	11	3	

Toplam Maliyet=193

Toplam talebin toplam arzdan büyük olduğu durumlar için kukla arz merkezine ilişkin dual değişken 0 alındığında, Şekil 6'dakinin tersine bütün $u_i \geq 0$ ve $v_j \leq o$ eldeedilir. Bunun anlamı, arz merkezlerinin kapasitelerindeki bir birimlik artışın toplam maliyette artışa ve talep merkezlerinin kapasitelerindeki bir birimlik artışın toplam maliyete azalışa neden olacağıdır.

Dengeli olmayan ulaştırma problemlerinde dual değişkenlerin açıklamaları şöyle özetlenebilir:

ÖNERME 5: Dengeli olmayan ulaştırma problemlerinde;

Toplam Arz > Toplam Talep ise, kukla talep merkezine ait $v_j=0$ alınır ve diğer bütün dual değişkenler hesaplandığında $u_i \leq 0$ ve $v_i \geq 0$ olur.

Toplam Arz < Toplam Talep ise, kukla arz merkezine ait $u_i=0$ alınır ve diğer bütün dual değişkenler hesaplandığında $u_i \geq 0$ ve $v_i \leq o$ olur.

Bu koşullarda;

u_i: i arz merkezinin kapasitesini bir birim artmanın toplam maliyete etkisini

v_j: j talep merkezinin ihtiyacının bir birim artmasının toplam maliyete etkisini belirler.

5. SONUÇ

Ulaştırma problemlerinde dual problemin sonsuz sayıda çözümün bulunması nedeniyle dual değişkenlerin ekonomik yorumunda bir karmaşıklık ortaya çıkmaktadır. Bu çalışmada, kukla arz ve kukla talep merkezlerine karşılık geler dual değişkenlerin 0 olarak belirlenmesiyle ekonomik yoruma açık dual değişken değerlerinin elde edildiği gösterilmiştir.

Dengeli ulaştırma problemlerinde arz ve talep merkezlerine ilişkin gölge fiyatların elde edilmesi için dual değişkenlerin iki kez ayrı ayrı hesaplanması gerekmektedir. Dengeli olmayan ulaştırma problemlerinde ise kukla merkeze ait dual değişkenin 0 alınmasıyla bir defada ekonomik yorum icin yeterli çözüm bulunabilmektedir. Ayrıca Gaver ve Thompson'un da belirttiği gibi, her iki durumda da gölge fiyatların hesaplanmasına esas olan yaklaşım, arz ve talep kapasitelerine ilişkin duyarlık analizinde kullanılabilmektedir. (Gaver ve Thompson, 1973, s. 145).

N. Moralı

ECONOMIC INTERPRETATION OF DUAL VARIABLES IN TRANSPORTATION PROBLEMS

SUMMARY

The dual of a transportation model has infinite number of dual solutions corresponding to each basic feasible solution of the primal problem. This fact implies a special economic interpretation of dual variables which satisfy certain conditions. This paper begins by examining the primal and dual of the transportation problems. Economic interpretation of dual variables are then discussed in detail for both balanced and unbalanced transportation models.

KAYNAKÇA

ANDERSON D.R . SWEENEY D.J.; WILLIAMS T.A., **An Introduction to Management Science: Quantitavite Approaches to Decision Making**, 3. Baskı, St.Paul, Weest, 1982.

GAVER D.P., THOMPSON G.L.; **Programming and Probability Models in Operations Research**, California, Brooks/Cole, 1973.

HILLER F.S., LIEBERMAN G.J.; **Introduction to Operations Research**, 2.Baskı, San Francisco, Holden-Day, 1974.

WINSTON W.L.; **Operations Research: Applications and Algorithnms**, 2.Baskı, Boston, PWS-Kent, 1991.